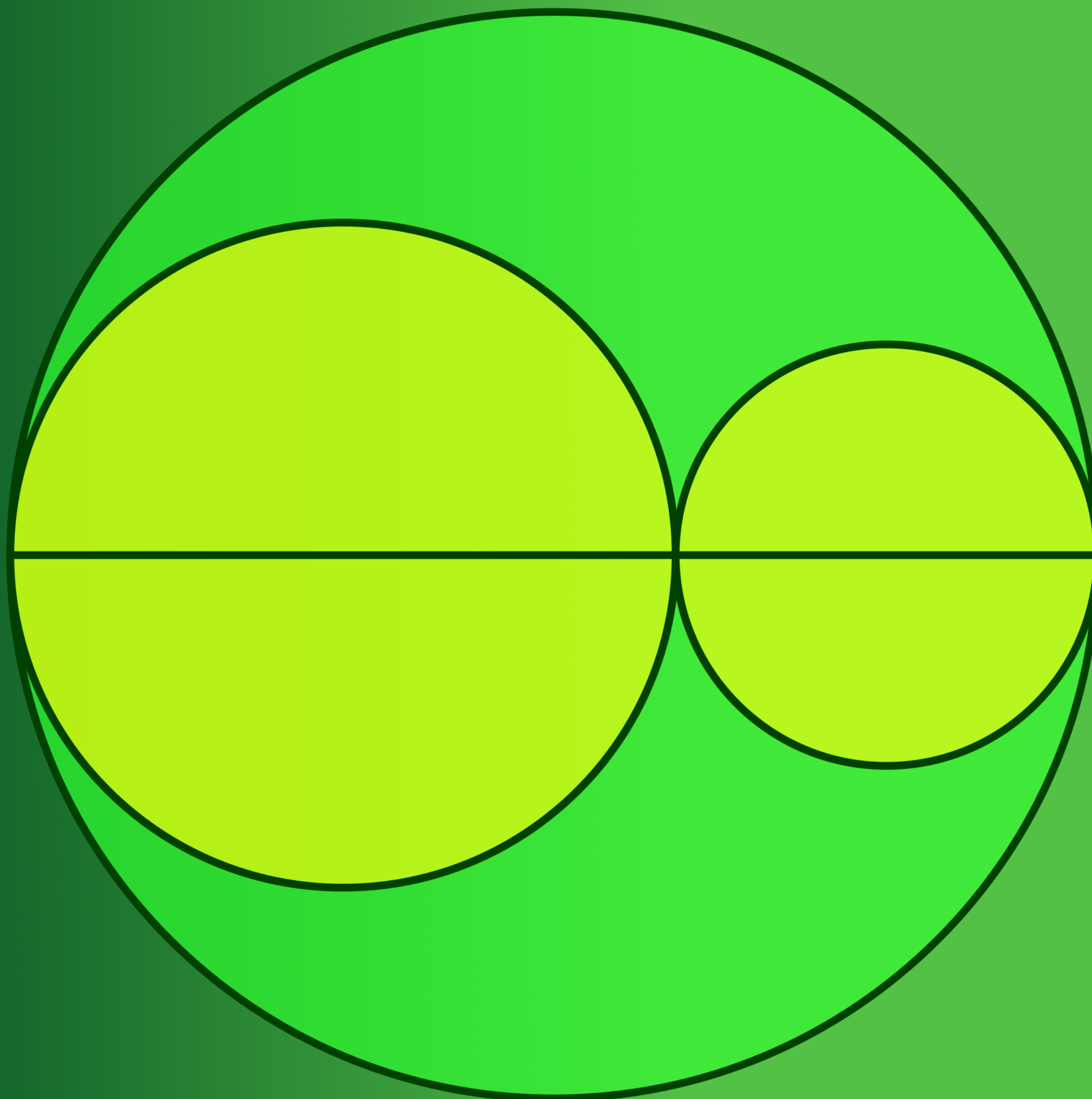
Ἀρχιμήδους



Βιβλίο Λημμάτων

ΒΙΒΛΙΟ ΛΗΜΜΑΤΩΝ

Ὑπὸ
Νικολάου Λ. Κεχρῆ
Ἀθήνα, Ἰούνιος 2018

ISBN: 978-1-387-90423-5

Πρόλογος

Τὸ βιβλίο τῶν Λημμάτων εἶναι μιὰ πραγματεία 15 θεωρημάτων σχετικὰ μὲ τὸν κύκλο τὰ ὁποῖα ἀποδίδονται στὸν Ἀρχιμήδη. Αὐτὰ δὲν ἐσώθηκαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἀλλὰ εἰς τὴν ἀραβικὴν ἐκ τῆς ὁποῖας μετεφράσθησαν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἐξεδόθησαν γιὰ πρώτη φορὰ στὸ Λονδίνο τὸ 1659. Μετέπειτα μετεφράσθησαν καὶ εἰς ἄλλες γλῶσσες.

Τὸ ἀρχαῖο κείμενο τὸ ὁποῖο χρησιμοποίησα εἶναι τὸ Liber assumptorum (grc) τὸ ὁποῖο βρῆκα σὲ συλλογὴ δεκατριῶν κειμένων τοῦ Ἀρχιμήδη στὴ διαδικτυακὴ βιβλιοθήκη Perseus Digital Library. Τὸ κείμενο αὐτὸ συμφωνεῖ πλήρως μὲ τὸ κείμενο στὴν ἔκδοση τοῦ Ἀρχιμήδη ὑπὸ Charles Mugler καὶ ἔχει μικρὲς διαφοροποιήσεις μὲ τὴν ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν Σικελικὴν Δωρικὴ διάλεκτο ὑπὸ τοῦ Εὐαγγέλου Σταμάτη. Αὐτὲς ἔχουν νὰ κάνουν κυρίως μὲ τὴν ἀπόδοση περιορισμένου ἀριθμοῦ λέξεων καὶ κάποιων ἀριθμητικῶν εἰς τήν δέκατη πέμπτη πρόταση. Κατὰ τὴν μεταφορὰ ὅπου ἔκρινα περισσότερο πιστὸ χρησιμοποίησα τὴν ἀπόδοση τοῦ Ε.Σταμάτη.

Τὸ νέο ἑλληνικὸ κείμενο εἶναι παραβαλλόμενο ἐν παραλληλία μὲ τὸ ἀρχαῖο οὕτως ὥστε ὁ ἀναγνώστης νὰ μπορεῖ νὰ ἐντοπίσει εὔκολα τὴν ἐπιτευχθεῖσα μετάφραση. Τὸ κριτὴριο ὡστόσο γιὰ τὴν ἀπόδοση στὴν νὲα ἑλληνικὴ δὲν ἦταν ἡ πιστὴ μετάφραση. Ἀντίθετα πολλὲς φορὲς χρησιμοποίησα πιὸ ἐλεύθερη μετάφραση καὶ σύγχρονο μαθηματικὸ συμβολισμό μὲ σκοπὸ οἱ ἐν λόγω προτάσεις νὰ γίνουν περισσότερο εὐανάγνωστες, νὰ ἀναδειχθεῖ ἡ λογική τους, ἔτσι ὥστε νὰ μποροῦν νὰ κατανοηθοῦν καὶ νὰ ἀφομοιωθοῦν ἀκόμα καὶ ἀπὸ ἕνα μαθητὴ Λυκεὶου.

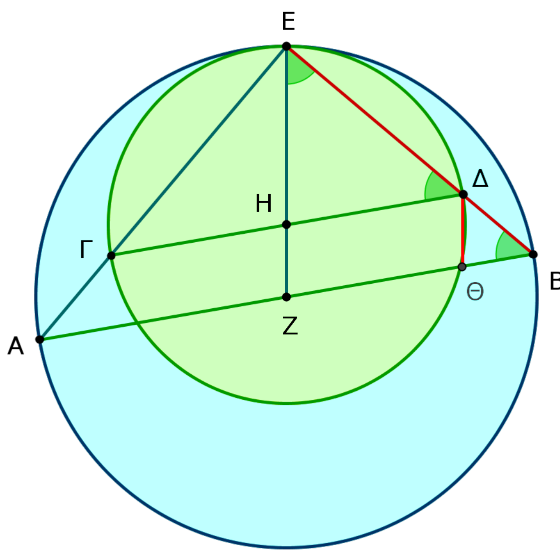
Θὰ ἤμουν εὐτυχὴς ἄν μὲ τὴν ἔκδοση αὐτὴ συμβάλλω κατ'ἐλάχιστο εἰς αὐτὰ ποὺ μᾶς δείχνει ἡ Γεωμετρία.

Αθήνα, Ἰούνιος 2018
Νικόλαος Κεχρής

α′.

Εἴ κα ᾖ δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντός, διάμετροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφῆς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ὧν κέντρα τὰ **Ζ**, **Η**, ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἁ **ΑΒ** παρὰ διάμετρον τὰν **ΓΔ**· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΕΔ**, **ΔΒ** εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.



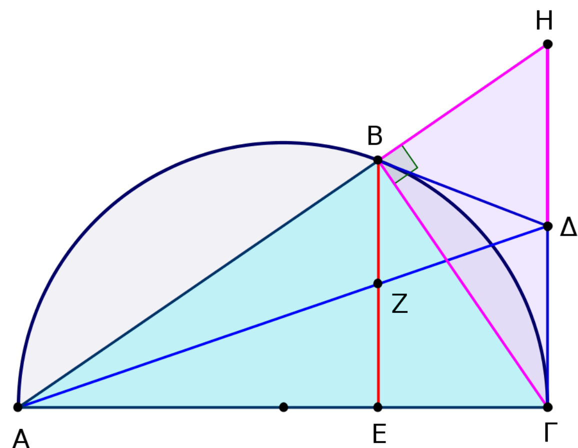
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ **ΖΗ** καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ **Ε**, ἄχθω δὲ ἁ **ΔΘ** παρὰ τὰν **ΖΗ**.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ **ΖΒ**, **ΖΕ** ἴσαι ἐντὶ καὶ ἁ **ΗΔ** τᾷ **ΖΘ**, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ **ΖΘ**, τουτέστιν ἁ **ΗΕ**· λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΘΔ**, **ΘΒ** ἴσαι ἀλλαλαις ἐντί.

γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΘΔΒ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΘΒΔ**, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ **ΗΔΕ**, ἐστὶν ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἁ ὑπὸ **ΗΔΒ** συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΗΔΒ**, **ΔΒΖ** συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ **ΗΔΒ**, **ΕΔΗ** ἐστὶν ἴσα· ἔστι δὲ συναμφότερος ἁ ὑπὸ **ΗΔΒ**, **ΔΒΖ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΗΔΒ**, **ΕΔΗ** δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴσα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ **ΕΔ**, **ΔΒ**· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

β′.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ, ἐπεζεύχθω δὲ ἁ ΑΔ· φαμὶ δὴ τὰν ΒΖ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΖΕ.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ **ΑΒ** καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ **Η** σαμεῖον καὶ ἄχθω ἁ **ΒΓ**.

Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΒΑ** ὀρθά ἐστιν, ἐσσεῖται καὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΒΗ** ὀρθά· ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα ἁ **ΒΔ** τᾷ **ΔΓ** ἴσα· ἐσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεῖα ἁ **ΔΗ** τᾷ **ΔΒ**, τουτέστι τᾷ **ΔΓ** ἴσα.

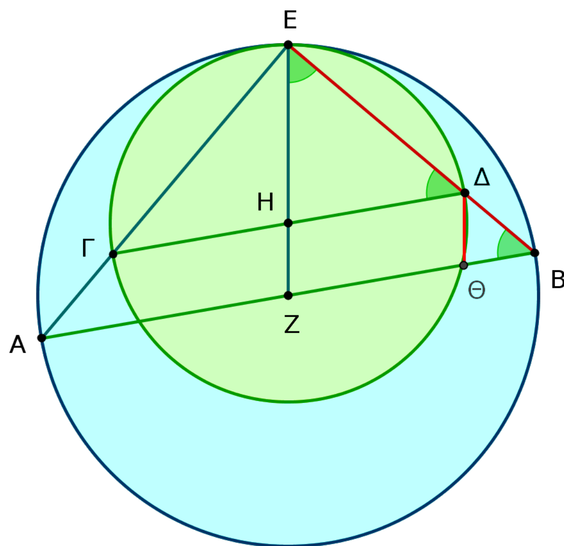
Καὶ ἐπεὶ ἁ **ΒΕ** παρὰ τὰν **ΗΓ** ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ **ΒΖ** τᾷ **ΖΕ** ἴσα·

δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

1.

Ἐὰν εἶναι δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐντός, (καὶ δύο) διάμετροι αὐτῶν παράλληλοι, ἄν ἐνωθοῦν τὸ σημεῖο ἁφῆς μὲ τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων, οἱ δὺο εὐθεῖαι θὰ βρίσκονται μεταξὺ των ἐπ' εὐθείας.

Ἄς εἶναι δύο κύκλοι, μὲ κέντρα τὰ **Ζ**, **Η**, ποὺ ἐφάπτονται μεταξὺ τους κατὰ τὸ **Ε** σημεῖο, διάμετρος δὲ ἡ **ΑΒ** παράλληλος μὲ τὴν διάμετρο **ΓΔ**· ἰσχυρίζομαι ὅτι ἄν ἐνωθοῦν οἱ **ΕΔ**, **ΔΒ** εὐθεῖαι θὰ βρίσκονται μεταξὺ των ἐπ' εὐθείας.



Διότι ἄς ἐνωθεῖ ἡ **ΖΗ** καὶ ἄς προεκταθεῖ ἕως τὸ **Ε** καὶ ἄς φέρουμε τὴν **ΔΘ** παράλληλο μὲ τὴν **ΖΗ**.

Ἐπειδὴ λοιπὸν (ἀφαίρεση κατά μέλη)

$$\left.\begin{cases} \mathbf{ZB} = \mathbf{ZE} \\ \mathbf{Z\Theta} = \mathbf{H\Delta} = \mathbf{HE} \end{cases}\right\} \rightarrow \mathbf{\Theta\Delta} = \mathbf{\Theta B}$$

Τότε θὰ εἶναι

$$\left.\begin{cases} \angle\mathbf{\Theta\Delta B} = \angle\mathbf{\Theta B\Delta} \\ \angle\mathbf{H\Delta E} = \angle\mathbf{HE\Delta} \\ \angle\mathbf{\Theta B\Delta} = \angle\mathbf{HE\Delta} \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle\mathbf{\Theta\Delta B} = \angle\mathbf{\Delta BZ} = \angle\mathbf{E\Delta H} = \angle\mathbf{HE\Delta}$$
$$\rightarrow \angle\mathbf{H\Delta B} + \angle\mathbf{\Delta BZ} = \angle\mathbf{H\Delta B} + \angle\mathbf{E\Delta H}$$
$$\rightarrow 2^{\mathsf{L}} = \angle\mathbf{H\Delta B} + \angle\mathbf{E\Delta H}$$

Ἐπ'εὐθείας ἄρα θὰ βρίσκονται οἱ εὐθεῖαι **ΕΔ**, **ΔΒ**. Ἀποδείχτηκε λοιπὸν τὸ προτεθὲν.[1]

2.

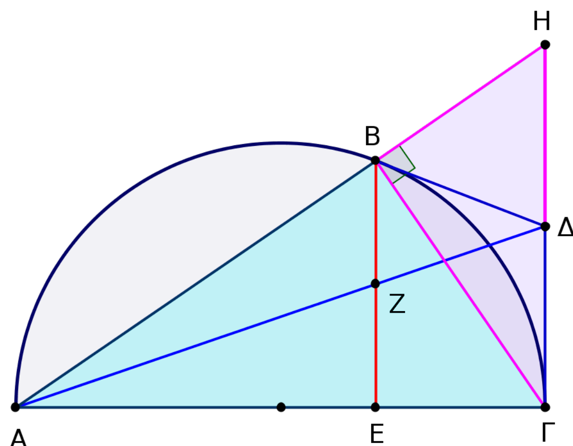
Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ οἱ ΔΒ, ΔΓ. Ἡ ΒΕ φέρεται κάθετη στὴν ΑΓ καὶ ἄς ἐνωθεῖ ἡ ΑΔ· ἰσχυρίζομαι ὅτι ΒΖ = ΖΕ.

Ἄς φέρουμε τὴν **ΑΒ** καὶ ἄς προεκταθοῦν οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἕως ὅτου συμπέσουν κατὰ τὸ **Η** σημεῖο καὶ ἄς φέρουμε τὴν **ΒΓ**.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ $\angle\mathbf{AB\Gamma} = 1^{\mathsf{L}}$ θὰ εἶναι καὶ $\angle\mathbf{\Gamma BH} = 1^{\mathsf{L}}$. Εἶναι δὲ καὶ **ΒΔ** = **ΔΓ** ἄρα θὰ εἶναι καὶ **ΔΗ** = **ΔΒ** = **ΔΓ**. (Τὸ **Δ** εἶναι κέντρο ἡμικυκλίου μὲ διάμετρο **ΓΗ**.)

Καὶ ἐπειδὴ **ΒΕ** παράλληλος πρὸς τὴν **ΗΓ** θὰ εἶναι καὶ **ΒΖ** = **ΖΕ**.

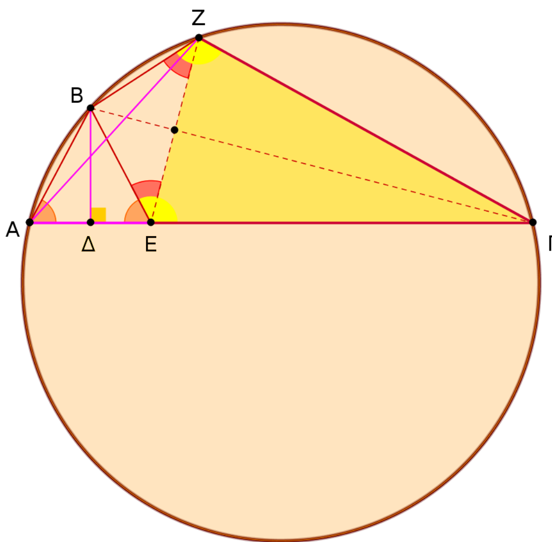
Ἀποδείχθηκε λοιπὸν τὸ προτεθέν.



[1] Ἡ ἴδια ἀπόδειξη ἰσχύει ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται μεταξὺ τους ἐξωτερικὰ.

γʹ.

Ἔστω τμᾶμα κύκλου τὸ ΑΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινος Β τᾶς περιφερείας ἄχθω τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΕ εὐθείᾳ τᾷ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΒΖ τᾷ ΑΒ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΓΖ εὐθεῖα τᾷ ΓΕ ἐστὶν ἴσα.



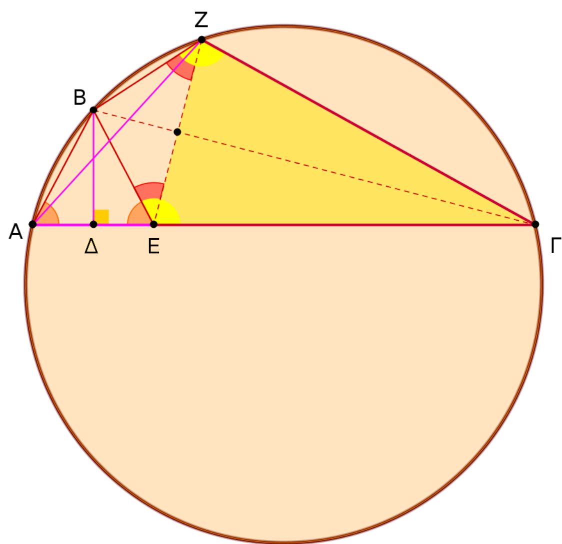
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΒ**, **ΒΖ**, **ΖΕ**, **ΕΒ** εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ ἁ **ΑΔ** τᾷ **ΔΕ** ἐστὶν ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ **ΒΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΔ**, **ΔΒ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΒ** ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΔΒ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΕΔΒ** ἴσα· βάσις ἄρα ἁ **ΕΒ** βάσει τᾷ **ΑΒ**, τουτέστι τᾷ **ΒΖ**, ἐστὶν ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΒΕΖ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΒΖΕ** ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ **ΑΒΖΓ** ἐν κύκλῳ ἐστίν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ **ΓΖΒ**, **ΓΑΒ**, τουτέστιν αἱ ὑπὸ **ΓΖΒ**, **ΒΕΑ**, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί.

Ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἁ ὑπὸ **ΓΕΒ**, **ΒΕΑ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ **ΒΕΑ**· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΓΖΒ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΓΕΒ** ἐστὶν ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ **ΒΖΕ**, τουτέστιν ἁ ὑπὸ **ΒΕΖ**· λοιπαὶ ἄρα αἱ ποτὶ τᾷ βάσει τᾷ **ΕΖ** τριγώνου τοῦ **ΕΓΖ** γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΓΖΕ**, **ΖΕΓ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· πλευρὰ ἄρα ἁ **ΖΓ** πλευρᾷ τᾷ **ΕΓ** ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

3.

Ἔστω τμῆμα κύκλου τὸ ΑΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖο Β τῆς περιφερείας ἅς φέρουμε στὴν ΑΓ κάθετη τὴν ΒΔ καὶ ἅς λάβουμε τὴν εὐθεῖα ΔΕ ἴση μὲ τὴν εὐθεία ΔΑ καὶ τὴν περιφέρεια ΒΖ ἴση μὲ τὴν ΑΒ· ἰσχυρίζομαι ὅτι ἄν ἐνωθοῦν οἱ ΓΖ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσες.



Διότι ἅς ἐνωθοῦν οἱ **ΑΒ**, **ΒΖ**, **ΖΕ**, **ΕΒ** εὐθεῖαι. Θὰ εἶναι τότε

$$\left.\begin{cases} \mathbf{Α Δ} = \mathbf{Δ Ε} \\ \mathbf{Β Δ} \text{ κοινὴ} \\ \angle \mathbf{Α Δ Β} = \angle \mathbf{Ε Δ Β} = 1^{\mathsf{L}} \end{cases}\right\} \rightarrow \mathbf{ΕΒ} = \mathbf{ΑΒ}$$

$\rightarrow \mathbf{ΕΒ} = \mathbf{ΑΒ} = \mathbf{ΒΖ}$
$\rightarrow \angle \mathbf{ΒΕΖ} = \angle \mathbf{ΒΖΕ}$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ **ΑΒΖΓ** εἶναι ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο θὰ εἶναι

$$\angle \mathbf{ΓΖΒ} + \angle \mathbf{ΓΑΒ} = 2^{\mathsf{L}} = \angle \mathbf{ΓΖΒ} + \angle \mathbf{ΒΕΑ}$$

Τότε ὅμως λαμβάνουμε

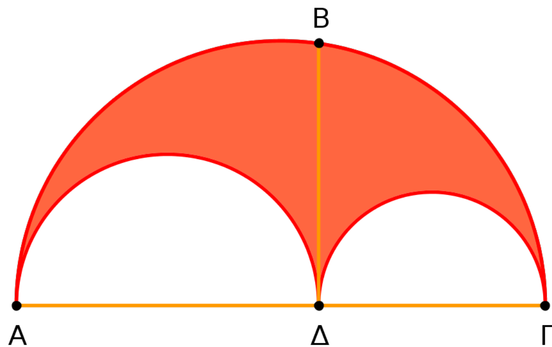
$$\left.\begin{cases} \angle \mathbf{ΓΖΒ} + \angle \mathbf{ΒΕΑ} = 2^{\mathsf{L}} \\ \angle \mathbf{ΓΕΒ} + \angle \mathbf{ΒΕΑ} = 2^{\mathsf{L}} \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \angle \mathbf{ΓΖΒ} = \angle \mathbf{ΓΕΒ}$
$\rightarrow \angle \mathbf{ΓΖΒ} - \angle \mathbf{ΒΖΕ} = \angle \mathbf{ΓΕΒ} - \angle \mathbf{ΒΕΖ}$
$\rightarrow \angle \mathbf{ΓΖΕ} = \angle \mathbf{ΖΕΓ}$

Δηλαδὴ τὸ τρίγωνο **ΓΖΕ** εἶναι ἰσοσκελὲς, ὁπότε **ΖΓ** = **ΕΓ**. Ἀποδείχθηκε λοιπὸν τὸ προτεθέν.

δ′.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν· τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τᾷ περιφερείᾳ τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ἀνασταкεῖσα κάθετος.



Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ **ΑΒΓ** καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς **ΑΓ** τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν **ΓΔ**, **ΔΑ** ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ **Δ** σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ **ΑΓ** ἁ **ΔΒ** φαμὶ δή, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ **ΔΒ**, ἴσον ἐστίν.

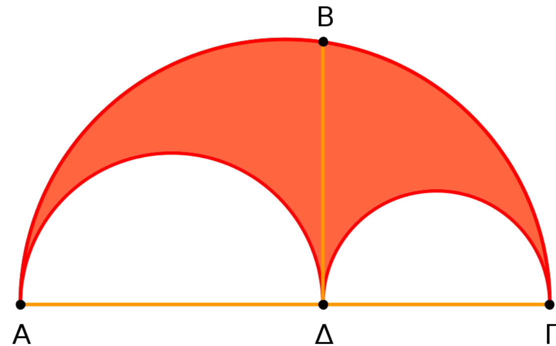
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΔΑ**, **ΔΒ**, **ΔΓ** ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** τῷ ἀπὸ τᾶς **ΒΔ** ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς **ΑΓ**, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΒΔ** ἐστὶν ἴσον.

Καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ **ΑΓ**, δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετρος ἁ **ΔΒ**, καὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**, ἴσος, τουτέστιν ἁμικύκλιον τὸ **ΑΓ** ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ **ΔΒ**, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ὧν διάμετροι αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ **ΑΔ**, **ΔΓ**· λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τᾶν **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΔΓ**, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ **ΔΒ**, ἐστὶν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

4.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθεῖ τι σημεῖο, ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου γραφοῦν δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθεῖ κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς περιφερείας, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων εἶναι ἴσο μὲ τὸν κύκλο τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθεῖσα κάθετος.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ **ΑΒΓ** καὶ σημεῖον τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου **ΑΓ** τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τῶν διαμέτρων **ΓΔ**, **ΔΑ** ἄς γραφοῦν ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἄς ὑψωθεῖ κάθετα στὴν **ΑΓ** ἡ **ΔΒ**, ἰσχυρίζομαι ὅτι, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, δηλαδὴ τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, τὸ ὁποῖο ἄς κληθεῖ ἄρβηλος, ὅτι ἰσοῦται μὲ κύκλο διαμέτρου ἴσης μὲ τὴν **ΔΒ**.



Ἐπειδὴ ἡ **ΔΒ** εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν **ΔΑ**, **ΔΓ** καὶ ἐὰν προσθέσουμε τὸ $\mathbf{ΑΔ} \cdot \mathbf{ΔΓ} + \mathbf{ΑΔ}^2 + \mathbf{ΔΓ}^2$ λαμβάνουμε

$$\mathbf{ΔΒ}^2 = \mathbf{ΑΔ} \cdot \mathbf{ΔΓ} \rightarrow$$
$$\mathbf{ΔΒ}^2 + \mathbf{ΑΔ} \cdot \mathbf{ΔΓ} + \mathbf{ΑΔ}^2 + \mathbf{ΔΓ}^2 = 2 \cdot \mathbf{ΑΔ} \cdot \mathbf{ΔΓ} + \mathbf{ΑΔ}^2 + \mathbf{ΔΓ}^2 \rightarrow$$
$$2 \cdot \mathbf{ΔΒ}^2 + \mathbf{ΑΔ}^2 + \mathbf{ΔΓ}^2 = (\mathbf{ΑΔ} + \mathbf{ΔΓ})^2 = \mathbf{ΑΓ}^2$$

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι μεταξὺ τους ὅπως τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τους [καὶ συμβολίζοντας μὲ $(\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΧΥ}})$ ἐμβαδὸν κύκλου διαμέτρου **ΧΥ** καὶ μὲ $(\mathbf{Η}_{\mathbf{ΧΥ}})$ τὸ ἐμβαδὸν ἡμικυκλίου διαμέτρου **ΧΥ**] λαμβάνουμε ἐκ τῶν ἀνωτέρω

$$2 \cdot (\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΔΒ}}) + (\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΑΔ}}) + (\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΔΓ}}) = (\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΑΓ}}) \rightarrow$$
$$(\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΔΒ}}) + (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΑΔ}}) + (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΔΓ}}) = (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΑΓ}}) \rightarrow$$
$$(\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΔΒ}}) = (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΑΓ}}) - (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΑΔ}}) - (\mathbf{Η}_{\mathbf{ΔΓ}}) \rightarrow$$
$$(\mathbf{Κ}_{\mathbf{ΔΒ}}) = (\mathbf{Ε}_{\mathbf{ἀρβήλου}})$$

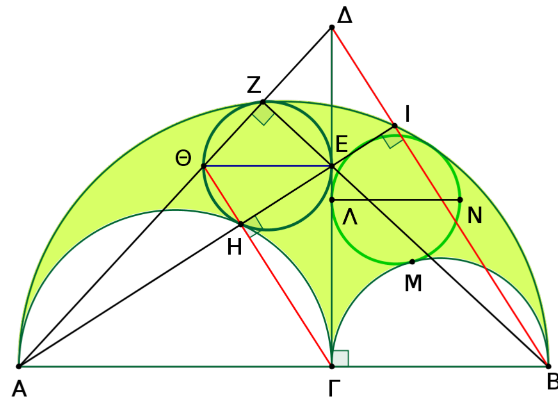
ἀπεδείχθει λοιπὸν τὸ προτεθὲν.

ε΄.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέωντι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας ἐπιψαύοντες αὐτᾶς καὶ τῶν ἁμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ **ΑΒ**, σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ **Γ**· ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** ἁμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τᾷ **ΑΒ** ἁ **ΓΔ**, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τᾶς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἁμικυκλίων· φαμὶ δή, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.

Ἔστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς **ΓΔ** κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον καὶ ἁμικυκλίου μὲν τοῦ **ΑΓ** κατὰ τὸ **Η**, ἁμικυκλίου δὲ τοῦ **ΑΒ** κατὰ τὸ **Ζ**, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ **ΘΕ**·



ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ **ΑΘ**, **ΘΖ** εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ **ΑΖ**, **ΓΕ** εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ **Δ** σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΖΕ**, **ΕΒ** ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ **ΘΗ**, **ΗΓ**, καὶ αἱ **ΕΗ**, **ΗΑ**, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ **ΑΕ** ἐπὶ τὸ **Ι** σαμεῖον, ἄχθω δὲ ἁ **ΒΙ** εὐθεῖα καὶ ἁ **ΙΔ**.

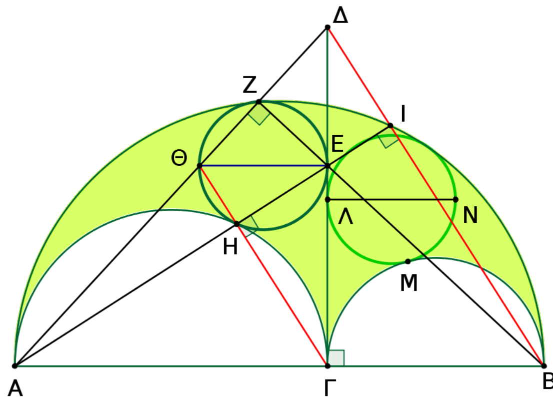
Ἐπεὶ οὖν αἱ **ΑΔ**, **ΑΒ** εὐθεῖαί ἐντι καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** σαμείου τᾷ **ΑΒ** ἆκται ποτ' ὀρθὰς ἁ **ΔΓ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** ποτ' ὀρθὰς τᾷ **ΔΑ** ἁ **ΒΖ** τεμνέουσα τὰν **ΔΓ**, κατὰ τὸ **Ε**, εὐθεῖα δὲ ἁ **ΑΕΙ** ποτ' ὀρθὰς τᾷ **ΒΙ** ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΒΙ**, **ΙΔ** ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ **ΒΔ** παρὰ τὰν **ΓΗ** ἐστίν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ **ΑΔ** ποτὶ τὰν **ΔΘ**, ὃν ἔχει ἁ **ΑΓ** ποτὶ τὰν **ΘΕ**, τουτέστιν ἁ **ΑΒ** ποτὶ τὰν **ΒΓ** τὸ ἄρα ὑπὸ τᾶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τῷ ὑπὸ τᾶν **ΑΒ**, **ΘΕ** ἐστὶν ἴσον· ὁμοίως δὴ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ **ΛΜΝ** τὸ ὑπὸ τᾶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τῷ ὑπὸ **ΑΒ** καὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ **ΛΜΝ** κύκλου ἴσον ἐστίν· αἱ διάμετροι ἄρα κύκλων τῶν **ΕΖΗ**, **ΛΜΝ** ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

5.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθεῖ τι σημεῖο, ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου γραφοῦν δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθεῖ κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ γραφοῦν πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῆς καὶ τῶν ἡμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι θὰ εἶναι ἴσοι μεταξὺ τους.

Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος ἡ **ΑΒ**, σημεῖον δέ τι ἐπ' αὐτῆς τὸ **Γ**· ἄς γραφοῦν δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων **ΑΓ**, **ΓΒ** ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου ἄς ὑψωθεῖ κάθετος στὴν διάμετρο **ΑΒ** ἡ **ΓΔ**, καὶ ἄς γραφοῦν πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῆς καὶ τῶν ἡμικυκλίων· ἰσχυρίζομαι ὅτι, οἱ γραφέντες κύκλοι θὰ εἶναι ἴσοι μεταξὺ τους.



Διότι ἔστω πρότερον ὁ κύκλος ὁ ἐφαπτόμενος τῆς **ΓΔ** κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον καὶ τοῦ μὲν **ΑΓ** ἡμικυκλίου κατὰ τὸ **Η**, τοῦ δὲ **ΑΒ** ἡμικυκλίου κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ ἄς ἀχθεῖ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ **ΘΕ**·

Ἄς ἑνωθοῦν τὰ τμήματα **ΑΘ**, **ΘΖ**, αὐτὰ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θ.1), καὶ ἄς προεκταθοῦν τὰ τμήματα **ΑΖ**, **ΓΕ** ἕως ὅτου συμπέσουν κατὰ τὸ **Δ** σημεῖον. Ὁμοίως ἄς ἑνωθοῦν τὰ τμήματα **ΖΕ**, **ΕΒ** αὐτὰ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θ.1), καὶ οἱ **ΘΗ**, **ΗΓ** (θ.1), καὶ οἱ **ΕΗ**, **ΗΑ** (θ.1), καὶ ἄς προεκταθεῖ ἡ **ΑΕ** ἐπὶ τὸ **Ι** σημεῖον (τῆς περιφερείας), καὶ ἄς ἀχθεῖ δὲ ἡ **ΒΙ** εὐθεῖα καὶ ἡ **ΙΔ**.

Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ **ΑΔ**, **ΑΒ** εἶναι εὐθεῖαι καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου πρὸς τὴν **ΑΒ** ἄγεται κάθετα ἡ **ΔΓ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** πρὸς τὴν **ΔΑ** ἄγεται κάθετα ἡ **ΒΖ** τέμνουσα τὴν **ΔΓ**, κατὰ τὸ **Ε**, (**Ε** ὀρθόκεντρο τοῦ **ΑΒΔ** συνεπάγεται $\mathbf{AEI} \perp \mathbf{B\Delta}$) καὶ ἡ εὐθεῖα **ΑΕΙ** τέμνει κάθετα τὴν **ΒΙ** ($\angle \mathbf{AIB} = 1^{\mathsf{L}}$), ἄρα οἱ εὐθεῖαι **ΒΙ**, **ΙΔ** θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὅπως ἀποδείξαμε στὴν πραγματεία Περὶ ὀρθοχωνίων τριχώνων.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ **ΒΔ** εἶναι παράλληλος πρός τὴν **ΓΗ** λαμβάνουμε

$$\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta\Theta}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Theta E}} \to$$
$$\mathbf{A\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma B} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{\Theta E}$$

Ὅμοια ἀποδεικνύουμε ὅτι στὸν κύκλο **ΛΜΝ** θὰ εἶναι

$$\mathbf{A\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma B} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{\Lambda N}$$

Ἄρα οἱ διάμετροι τῶν δύο κύκλων **ΕΖΗ**, **ΛΜΝ** εἶναι ἴσοι, ὁπότε οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι. ἀπεδείχθει λοιπὸν τὸ προτεθὲν.

ς′.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ **ΑΒΓ**, σαμεῖον δὲ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ **Δ** καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ **ΑΔ** ἐλάσσονος τοῦ **ΔΓ** ἁμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἀναγεγράφθων ἁμικύκλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ **ΕΖ** ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν **ΑΓ** ἁ **ΕΖ**. Εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς **ΑΓ** ποτὶ διάμετρον τὰν **ΕΖ**.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ** εὐθεῖαι καὶ αἱ **ΓΖ**, **ΖΒ**· εὐθεῖαι δή ἐντι αἱ **ΑΒ**, **ΓΒ**, ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. Ἐπεζεύχθωσαν ἔτι αἱ **ΖΗΑ**, **ΕΘΓ**· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι εἶμεν· ἔτι δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΔΕ**, **ΔΖ**, καὶ αἱ **ΔΙ**, **ΔΛ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΕΜ**, **ΖΝ** ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ **Ο**, **Ρ** σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ **ΑΕΔ** ἁ **ΑΗ** τᾷ **ΕΔ** ποτ᾽ ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἁ **ΔΙ** τᾷ **ΑΕ**, τεμνέοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ **Μ** σαμεῖον, ἁ **ΕΜΟ** τᾷ **ΑΓ** ἐσσεῖται ποτ᾽ ὀρθάς, ὡς παῤ ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ **ΖΝΡ** τᾷ **ΓΑ** ἐσσεῖται ποτ᾽ ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ἁ **ΔΛ** παρὰ τὰν **ΑΒ** καὶ ἁ **ΔΙ** παρὰ τὰν **ΓΒ**·

ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ **ΑΔ** ποτὶ τὰν **ΔΓ**, ὃν ἔχει ἁ **ΑΜ** ποτὶ τὰν **ΜΖ**, τουτέστιν ἁ **ΑΟ** ποτὶ τὰν **ΟΡ** καὶ ἁ **ΓΔ** ποτὶ τὰν **ΔΑ** τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ **ΓΝ** ποτὶ τὰν **ΝΕ**, τουτέστιν ἁ **ΓΡ** ποτὶ τὰν **ΡΟ**· ἦν δὲ ἁ **ΑΔ** ἁμιόλιος τᾶς **ΔΓ**· καὶ ἁ **ΑΟ** ἄρα τᾶς **ΟΡ** ἐστὶν ἁμιόλιος, καὶ ἁ **ΟΡ** τᾶς **ΓΡ**· εὐθεῖαι ἄρα αἱ **ΑΟ**, **ΟΡ**, **ΡΓ** ἑξῆς ἀνάλόγον ἐντι, ἃν ἁ μὲν **ΡΓ** ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ **ΟΡ** ἕξ, ἁ δὲ **ΑΟ** ἐννέα, ἁ δὲ **ΓΑ** ἐννεακαίδεκα.

Ἔστι δὲ ἁ **ΡΟ** τᾷ **ΕΖ** ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ **ΑΓ** ποτὶ τὰν **ΕΖ**, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καί ἐστιν ἁ **ΑΓ** διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ **ΑΒΓ**, ἁ δὲ **ΕΖ** κύκλου τοῦ **ΕΒΖ**· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος.

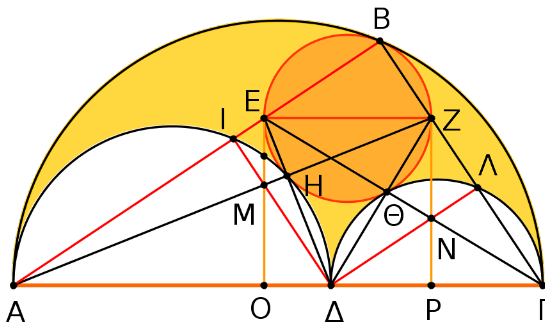
Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.

6.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθεῖ τι σημεῖο καὶ γραφοῦν ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντὸς, γραφτεῖ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων, νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρο τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ **ΑΒΓ**, σημεῖον δὲ τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ **Δ** τέτοιο, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ **ΑΔ** νὰ εἶναι τὰ $3/2$ τοῦ ἐλάσσονος τοῦ **ΔΓ**, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων **ΑΔ**, **ΔΓ** ἄς ἀναγραφοῦν ἡμικύκλια, καὶ ἄς γραφεῖ εἰς τὸν ἄρβηλο κύκλος ὁ **ΕΖ** ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων, καὶ ἄς ἀχθεῖ ἡ παράλληλος μὲ τὴν **ΑΓ** διάμετρος αὐτοῦ ἡ **ΕΖ**. Νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τῆς **ΑΓ** πρὸς τὴν διάμετρον **ΕΖ**.

Ἄς ἑνωθοῦν οἱ εὐθεῖες **ΑΕ**, **ΕΒ** καὶ οἱ **ΓΖ**, **ΖΒ**· θὰ εἶναι τότε εὐθεῖαι οἱ **ΑΒ**, **ΓΒ**, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ.1). Ἄς ἑνωθοῦν ἀκόμα οἱ **ΖΗΑ**, **ΕΘΓ**· ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι καὶ αὐταὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· Ἀκόμα δὲ ἄς ἑνωθοῦν οἱ **ΔΕ**, **ΔΖ**, καὶ οἱ **ΔΙ**, **ΔΛ**, καὶ ἄς ἑνωθοῦν οἱ **ΕΜ**, **ΖΝ** καὶ ἄς προεκταθοῦν ἐπὶ τὰ **Ο**, **Ρ** σημεῖα.



Ἐπειδὴ λοιπὸν στὸ τρίγωνο **ΑΕΔ** ἡ **ΑΗ** εἶναι κάθετος στὴν **ΕΔ**, καὶ ἡ **ΔΙ** στὴν **ΑΕ**, τέμνονται δὲ μεταξὺ των κατὰ τὸ **Μ** σημεῖον, ἡ **ΕΜΟ** εἶναι κάθετος στὴν **ΑΓ**, ὡς ἐδείχθη στὸ Περὶ τριγώνων καὶ ὑπετέθη στὸ προηγούμενο θεώρημα· γιὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ **ΖΝΡ** εἶναι κάθετος στὴν **ΓΑ**. Εἶναι δὲ ἡ **ΔΛ** παράλληλος μὲ τὴν **ΑΒ** καὶ ἡ **ΔΙ** παράλληλος μὲ τὴν **ΓΒ**· ὥστε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathbf{А\Delta}}{\mathbf{\Delta\Gamma}} = \frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{MZ}} = \frac{\mathbf{AO}}{\mathbf{OP}} \\ \frac{\mathbf{\Gamma\Delta}}{\mathbf{\Delta A}} = \frac{\mathbf{\Gamma N}}{\mathbf{NE}} = \frac{\mathbf{\Gamma P}}{\mathbf{PO}} \\ \frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta\Gamma}} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{AO} = \frac{3}{2}\mathbf{OP} \\ \mathbf{OP} = \frac{3}{2}\mathbf{\Gamma P} \end{aligned}$$

Ἄρα οἱ εὐθεῖες **ΑΟ**, **ΟΡ**, **ΡΓ** εἶναι σὲ συνεχὴ ἀναλογία (σὲ γεωμετρικὴ πρόοδο) καὶ ὅταν **ΡΓ** $= 4$, **ΟΡ** $= 6$, **ΑΟ** $= 9$ καὶ **ΓΑ** $= 19$. Ἐπειδὴ δὲ **ΡΟ** $=$ **ΕΖ** θὰ εἶναι

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{EZ}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{PO}} = \frac{19}{6}$$

καὶ εἶναι ἡ **ΑΓ** διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου **ΑΒΓ**, ἡ δὲ **ΕΖ** τοῦ κύκλου **ΕΒΖ**· εὑρέθη ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος.

Μὲ ὅμοιο τρόπο εὑρίσκεται καὶ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου (ὅταν ὁ ἀρχικὸς) εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mathbf{n}+1}{\mathbf{n}}$.

ζʹ.

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστίν.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ **ΑΒ** περὶ τετράγωνον τὸ **ΑΒ** καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ **ΓΔ**, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου, ἁ **ΑΒ**, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἁ **ΓΔ** παρὰ τὰν **ΑΕ**· φαμὶ δή, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίων.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς **ΑΒ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΑΕ**, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΓΔ**, οἱ κύκλοι δὲ ἐντι ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων·

δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ηʹ.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις ΑΒ προσαρμοσμένα ᾖ, ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Ε σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἁ ΑΕ περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων.

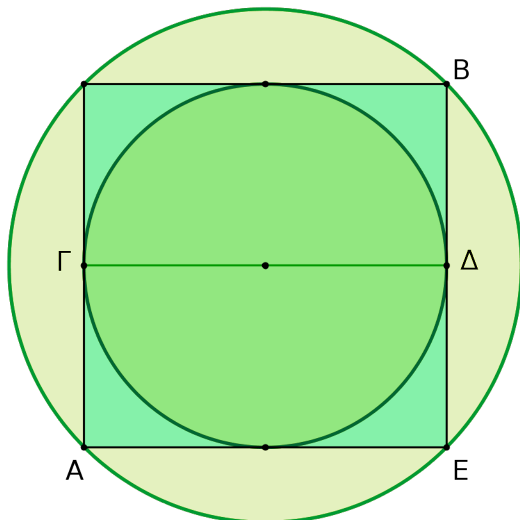
Ἄχθω γὰρ ἁ **ΕΗ** παρὰ τὰν **ΑΒ** καὶ ἐπεζεύχθων αἱ **ΔΒ**, **ΔΗ**.

Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΒΔΓ**, **ΔΕΗ**, **ΔΗΕ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ **ΓΔΗ** γωνίας τᾶς ὑπὸ **ΔΕΗ** ἐστὶ διπλασίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΒΔΗ** γωνίας τᾶς ὑπὸ **ΒΔΓ** τριπλασίων.

Ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ **ΒΗ**, τουτέστιν ἁ **ΑΕ**, περιφερείας τᾶς **ΒΖ** τριπλασίων. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

7.

Ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνο κύκλος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου.



Διότι ἔστω ὁ κύκλος **AB** περὶ τοῦ τετραγώνου **AB** καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ **ΓΔ**, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου, ἡ **AB**. Ἄς ἀχθεῖ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ **ΓΔ** παράλληλος πρὸς τὴν **AE**· Ἰσχυρίζομαι ὅτι, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Ἐπειδὴ λοιπὸν

$$\mathbf{AB}^2 = 2 \cdot \mathbf{AE}^2 = 2 \cdot \mathbf{\Gamma\Delta}^2$$

οἱ δὲ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου·

Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

8.

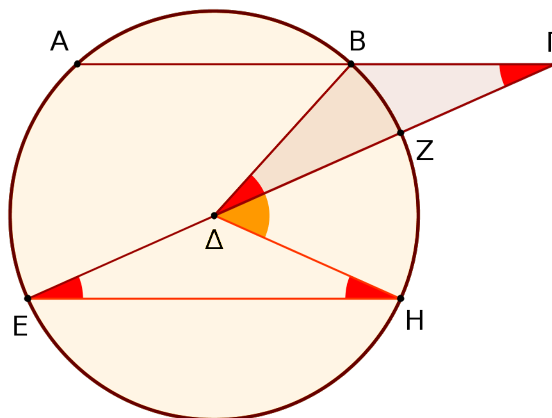
Ἐὰν σὲ κύκλο χορδή τις AB, ἐκβληθεῖ ἕως τὸ Γ σημεῖο, ἔτσι ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΓ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἀχθεῖ δὲ εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἕως τὸ E σημεῖο, τὸ τόξο AE θὰ εἶναι τριπλὰσιο τοῦ τόξου BZ.

Διότι ἄς ἀχθεῖ ἡ **EH** παράλληλος πρὸς τὴν **AB** καὶ ἄς ἑνωθοῦν οἱ **ΔB**, **ΔH**.

$$\left.\begin{array}{l}\angle\mathbf{B\Gamma\Delta} = \angle\mathbf{B\Delta\Gamma} = \angle\mathbf{\Delta EH} = \angle\mathbf{\Delta HE} \\ \angle\mathbf{\Gamma\Delta H} = 2 \cdot \angle\mathbf{\Delta EH}\end{array}\right\} \rightarrow$$

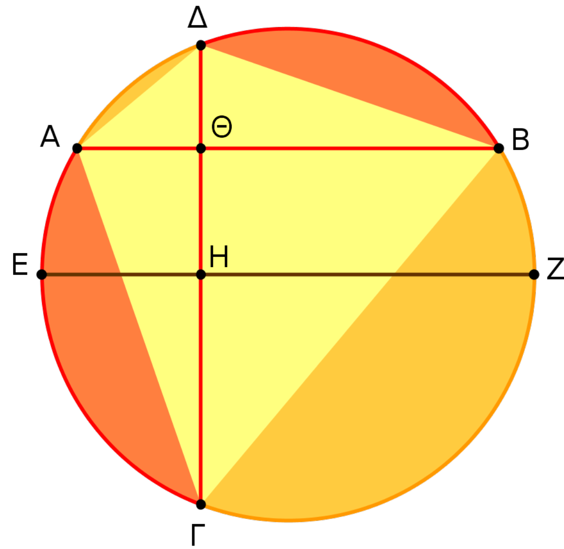
$$\rightarrow \angle\mathbf{B\Delta H} = 3 \cdot \angle\mathbf{B\Delta\Gamma}$$

Ἄρα θὰ εἶναι τὸ τόξο **BH** δηλαδὴ τὸ **AE** τριπλὰσιο τοῦ τόξου **BZ**. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.



θ′.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.



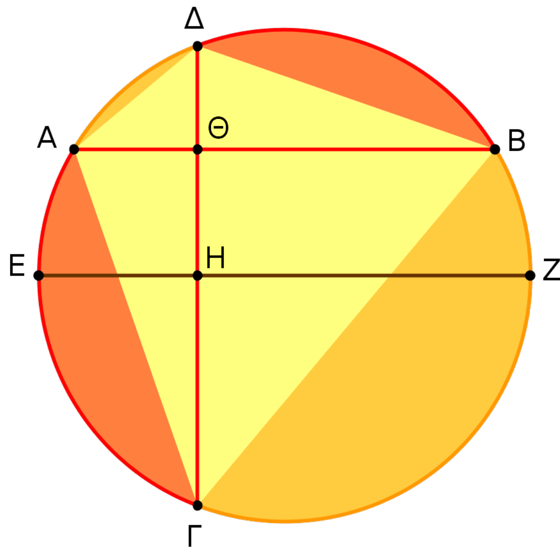
Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ** καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνέουσαι ἀλλάλας ποτ' ὀρθάς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· φαμὶ δή, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ **ΑΔ**, **ΓΒ** δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς **ΑΓ**, **ΒΔ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Τετμάσθω γὰρ δίχα ἁ **ΓΔ** κατὰ τὸ **Η** σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ **Η** διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ **ΕΖ** παρὰ τὰν **ΑΒ**.

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἁ **ΕΓ** περιφερείαις ταῖς **ΕΑ**, **ΑΔ** ἴσα ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ **ΓΖ**, **ΕΑ**, **ΑΔ** ἁμικυκλίῳ ἴσαι. ἔστι δὲ περιφέρεια ἁ **ΕΑ** περιφερείᾳ τᾷ **ΒΖ** ἴσα· συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἁ **ΓΒ**, **ΑΔ** ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος περιφέρεια ἁ **ΑΓ**, **ΔΒ** ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

9.

Ἐὰν σὲ ἕνα κύκλο δύο εὐθεῖες τέμνονται καθέτως μὴ διερχόμενες διὰ τοῦ κέντρου τότε τὸ ἄθροισμα δύο ἀπεναντίον τόξων εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπεναντίον ἄλλων.



Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ** καὶ δύο εὐθεῖες οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνόμενες καθέτως καὶ μὴ διερχόμενες διὰ τοῦ κέντρου· ἰσχυρίζομαι ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπεναντίον τόξων $\widehat{\mathsf{A\Delta}}$, $\widehat{\mathsf{\Gamma B}}$, εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπεναντίον ἄλλων $\widehat{\mathsf{A\Gamma}}$, $\widehat{\mathsf{B\Delta}}$. Δηλαδὴ

$$\widehat{\mathsf{A\Delta}} + \widehat{\mathsf{\Gamma B}} = \widehat{\mathsf{A\Gamma}} + \widehat{\mathsf{B\Delta}}$$

Διότι ἄς τμηθεῖ εἰς τὸ μέσο ἡ **ΓΔ** κατὰ τὸ **Η** σημεῖο καὶ διὰ τοῦ **Η** ἄς ἀχθεῖ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ **ΕΖ** παράλληλος μὲ τὴν **ΑΒ**.

Ἐπειδὴ λοιπὸν

$\widehat{\mathsf{E\Gamma}} = \widehat{\mathsf{EA}} + \widehat{\mathsf{A\Delta}}$
$\rightarrow \widehat{\mathsf{\Gamma Z}} + \widehat{\mathsf{EA}} + \widehat{\mathsf{A\Delta}} = 1$ ἡμικύκλιο

Ὅμως **ΕΑ** $=$ **ΒΖ** ἄρα
$\rightarrow \widehat{\mathsf{\Gamma Z}} + \widehat{\mathsf{BZ}} + \widehat{\mathsf{A\Delta}} = 1$ ἡμικύκλιο
$\rightarrow \widehat{\mathsf{\Gamma B}} + \widehat{\mathsf{A\Delta}} = 1$ ἡμικύκλιο

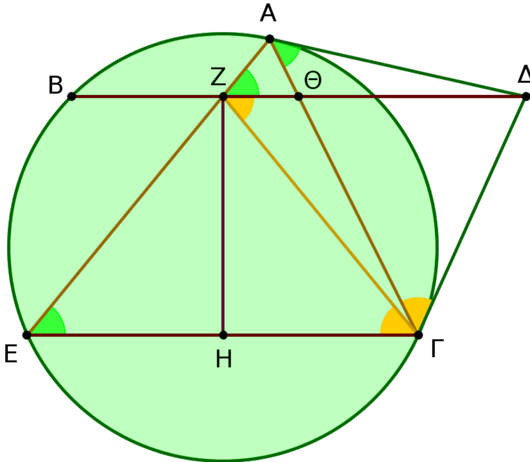
Ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τόξων θὰ εἶναι ἴσο μὲ ἕνα ἡμικύκλιο, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$\widehat{\mathsf{A\Gamma}} + \widehat{\mathsf{\Delta B}} = 1$ ἡμικύκλιο

Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ι΄.

Εἴ κα ᾖ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τεμνέουσα δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἁ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἁ ΕΑ τεμνέουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ΕΓ ἀχθῇ ἁ ΖΗ, ἁ ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.



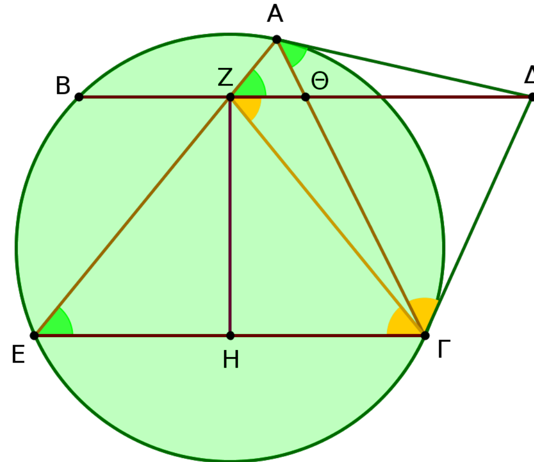
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ **ΑΓ**. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ **ΔΑ** ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, ἁ δὲ **ΑΓ** τεμνέουσα αὐτοῦ, γωνία ἁ ὑπὸ **ΔΑΓ** τᾷ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμάματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΑΕΓ**, τουτέστι τᾷ ὑπὸ **ΑΖΔ**, ἐστὶν ἴσα. Ἔστι γὰρ ἁ **ΓΕ** παρὰ τὰν **ΒΔ**.

Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς **ΔΑΖ**, **ΑΘΔ** δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΖΔ**, **ΘΑΔ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ πρὸς τῷ **Δ** κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΖΔ**, **ΔΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς **ΔΑ**, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς **ΔΓ** τετραγώνῳ, ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ οὖν ὃν λόγον ἔχει ἁ **ΖΔ** ποτὶ τὰν **ΔΓ**, τοῦτον ἔχει καὶ ἁ **ΔΓ** ποτὶ τὰν **ΔΘ**, γωνία δὲ ἁ ποτὶ τὸ **Δ** σαμεῖον κοινά ἐστιν, τρίγωνα ἄρα τὰ **ΔΖΓ**, **ΔΓΘ** ἐστὶν ὅμοια καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΖΓ**, **ΔΓΘ**, **ΔΑΘ**, **ΑΖΔ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΔΖΓ** τᾷ ὑπὸ **ΖΓΕ** ἴσα· ἦν δὲ καὶ ἁ ὑπὸ **ΔΖΑ** τᾷ ὑπὸ **ΑΕΓ** ἴσα· ἐν δυσὶ τριγώνοις ἄρα τοῖς **ΕΗΖ**, **ΓΗΖ** δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΗΕΖ**, **ΗΓΖ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ αἱ ποτὶ τῷ **Η** σαμείῳ γωνίαι ὀρθαί· ἔστι δὲ πλευρὰ ἁ **ΗΖ** κοινά· ἔστιν ἄρα ἁ **ΕΗ** τᾷ **ΗΓ** ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

10.

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλο ΑΒΓ δύο εὐθεῖες οἱ ΔΑ, ΔΓ ἐφάπτονται αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα, ἀχθεῖ δὲ ἡ τέμνουσα ΔΒ καὶ ἡ ΕΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἄν ἑνωθεῖ ἡ ΕΑ τέμνουσα τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀχθεῖ ἡ ΖΗ κάθετος πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ ἀχθεῖσα διχοτομεῖ τὴν ΕΓ.

Διότι ἄς ἀχθεῖ ἡ **ΑΓ**. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα **ΔΑ** εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἡ δὲ **ΑΓ** χορδὴ αὐτοῦ καὶ ἐπειδὴ **ΓΕ** παράλληλος πρὸς τὴν **ΒΔ**, θὰ εἶναι



$$\angle \mathbf{\Delta A\Gamma} = \angle \mathbf{AE\Gamma} = \angle \mathbf{AZ\Delta}$$

Καὶ ἐπειδὴ γιὰ τὰ τρίγωνα **ΔΑΖ**, **ΑΘΔ** εἶναι $\angle \mathbf{AZ\Delta} = \angle \mathbf{\Theta A\Delta}$ καὶ $\angle \mathbf{\Delta}$ κοινή, εἶναι ὅμοια. Λαμβάνουμε λοιπὸν

$$\triangle \mathbf{\Delta AZ} \approx \triangle \mathbf{A\Theta\Delta} \to$$
$$\frac{\mathbf{Z\Delta}}{\mathbf{\Delta A}} = \frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{\Delta\Theta}} \to$$
$$\mathbf{Z\Delta} \cdot \mathbf{\Delta\Theta} = \mathbf{\Delta A}^2 \to$$
$$\mathbf{Z\Delta} \cdot \mathbf{\Delta\Theta} = \mathbf{\Delta\Gamma}^2 \to$$
$$\frac{\mathbf{Z\Delta}}{\mathbf{\Delta\Gamma}} = \frac{\mathbf{\Delta\Gamma}}{\mathbf{\Delta\Theta}},\ \angle \mathbf{\Delta}\ \text{κοινὴ} \to$$
$$\triangle \mathbf{\Delta Z\Gamma} \approx \triangle \mathbf{\Delta\Gamma\Theta} \to$$
$$\angle \mathbf{\Delta Z\Gamma} = \angle \mathbf{\Delta\Gamma\Theta} = \angle \mathbf{\Delta A\Theta} = \angle \mathbf{AZ\Delta}$$

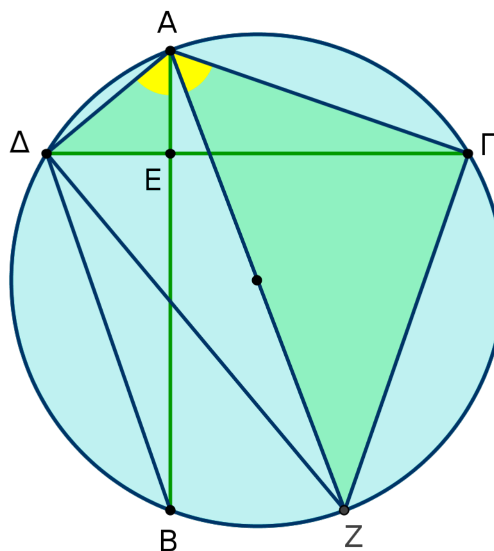
Ἐκ τῆς προηγούμενης σχέσεως καὶ ἐπειδὴ **ΕΓ** ∥ **ΒΔ**, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{r} \angle \mathbf{\Delta Z\Gamma} = \angle \mathbf{Z\Gamma E} \\ \angle \mathbf{\Delta ZA} = \angle \mathbf{AE\Gamma} \\ \angle \mathbf{\Delta Z\Gamma} = \angle \mathbf{\Delta ZA} \end{array}\right\} \to \angle \mathbf{AE\Gamma} = \angle \mathbf{Z\Gamma E} \to \angle \mathbf{HEZ} = \angle \mathbf{H\Gamma Z}$$

Ἄρα τὰ τρίγωνα **ΕΗΖ**, **ΓΗΖ** ἔχουν $\angle \mathbf{HEZ} = \angle \mathbf{H\Gamma Z}$, $\angle \mathbf{ZHE} = \angle \mathbf{ZH\Gamma} = 1^{\mathbf{L}}$ καὶ **ΖΗ** κοινή. Εἶναι λοιπὸυ ἴσα, ὁπότε $\mathbf{EH} = \mathbf{H\Gamma}$. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ια΄.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ᾽ ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν εὐθειῶν τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐντί.



Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τετμάσθων ποτ᾽ ὀρθὰς κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον· φαμὶ δή, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΓΕ**, **ΕΔ** τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

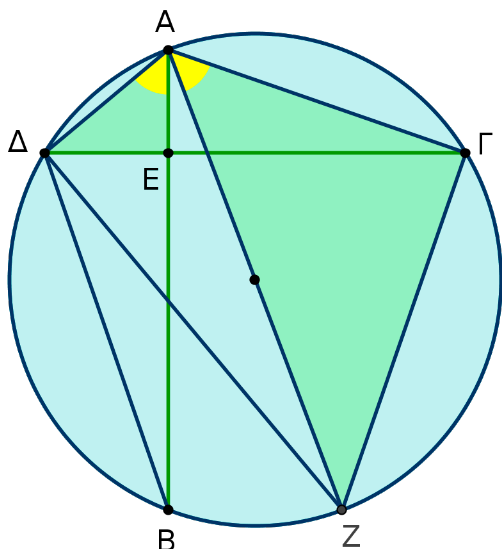
Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ **ΑΖ** καὶ ἐπεζεύχθων αἱ **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΓΖ**, **ΔΒ** εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς **ΑΔΕ**, **ΑΖΓ** γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΕΔ**, **ΑΔΕ**, καὶ **ΑΓΖ**, **ΑΖΓ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΓΑΖ**, **ΔΑΕ** ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἴσαι· περιφέρειαι ἄρα αἱ **ΓΖ**, **ΔΒ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι αἱ **ΓΖ**, **ΔΒ**· ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** τῷ ἀπὸ τᾶς **ΔΒ**, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς **ΓΖ**, ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** τῷ ἀπὸ τᾶς **ΓΑ**, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΓΑ** τῷ ἀπὸ τᾶς **ΖΑ**, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ἴσα·

ἐσσοῦνται ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΓΕ**, **ΕΔ** τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

11.

Ἐὰν εἰς κύκλο δύο εὐθεῖες τέμνονται καθέτως, μὴ διερχόνενες ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετρὰγωνο τῆς διαμέτρου.



Διότι ἔστω ὁ κύκλος **ΑΒΓ**, καὶ δύο εὐθεῖ-ες οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνόμενες κάθετα κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον· ἰσχυρίζομαι ὅτι,

$$\mathsf{AE}^2 + \mathsf{EB}^2 + \Gamma\mathsf{E}^2 + \mathsf{E}\Delta^2$$

εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο τῆς διαμέ-τρου τοῦ κύκλου.

Ἄς ἀχθεῖ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ **ΑΖ** καὶ ἄς ἐνωθοῦν οἱ εὐθεῖες **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΓΖ**, **ΔΒ**.

Ἀπὸ τὰ τρίγωνα **ΑΔΕ**, **ΑΖΓ** λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} 1^{\mathsf{L}} = \angle \mathsf{AE}\Delta = \angle \mathsf{A}\Gamma\mathsf{Z} \\ \angle \mathsf{A}\Delta\mathsf{E} = \angle \mathsf{AZ}\Gamma \end{array}\right\} \to \angle \Delta\mathsf{AE} = \angle \Gamma\mathsf{AZ}$$

$$\to \widehat{\Delta\mathsf{B}} = \widehat{\Gamma\mathsf{Z}}$$
$$\to \Delta\mathsf{B} = \Gamma\mathsf{Z}$$

Θά εἶναι τότε

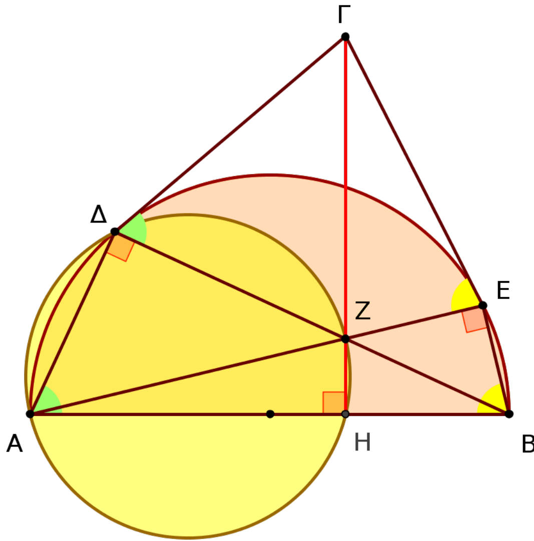
$$\left.\begin{array}{l} \Delta\mathsf{E}^2 + \mathsf{EB}^2 = \Delta\mathsf{B}^2 = \Gamma\mathsf{Z}^2 \\ \mathsf{AE}^2 + \mathsf{E}\Gamma^2 = \Gamma\mathsf{A}^2 \\ \Gamma\mathsf{Z}^2 + \Gamma\mathsf{A}^2 = \mathsf{ZA}^2 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \mathsf{AE}^2 + \mathsf{EB}^2 + \Gamma\mathsf{E}^2 + \mathsf{E}\Delta^2 = \mathsf{ZA}^2$$

Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώ-νων τῶν τμημάτων εἶναι ἴσο μὲ τὸ τε-τράγωνο τῆς διαμέτρου· ἀπεδείχθη λοι-πὸν τὸ προτεθέν.

ιβʹ.

Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάττεσι τᾶς διαμέτρου τεμνέουσαι ἀλλάλας, ἁ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἐσσεῖται ταύτᾳ ποτ᾽ ὀρθάς.



Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ **ΑΒ**, σαμεῖον δὲ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ **Γ**, καὶ ἐκ τοῦ **Γ** ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ **ΓΔ**, **ΓΕ** ἐπίψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ **Δ**, **Ε** σαμεῖα, ἐπεζεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάττεσι τᾶς διαμέτρου τὰ **Α**, **Β** εὐθεῖαι αἱ **ΕΑ**, **ΔΒ** τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ ἀχθεῖσα ἁ **ΓΖ** ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ **Η** σαμεῖον· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ **ΓΗ** διαμέτρῳ τᾷ **ΑΒ** ἐσσεῖται ποτ᾽ ὀρθάς.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ **ΑΔ**, **ΕΒ**. Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ **ΔΑΒ** γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΔΒ** ὀρθά ἐστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΑΒ**, **ΔΒΑ** μιᾶ ὀρθᾷ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΕΒ** μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἁ ὑπὸ **ΖΒΕ**· συναμφότερος ἄρα ἁ ὑπὸ **ΔΑΒ**, **ΑΒΕ** συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ **ΖΒΕ**, **ΖΕΒ**, τουτέστιν ἐξωτερικᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΔΖΕ** τριγώνου τοῦ **ΖΒΕ** ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ **ΓΔ** ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, διᾶκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς τοῦ **Δ** ἁ **ΔΒ** τεμνέουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΔΒ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΔΑΒ** ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΕΖ** τᾷ ὑπὸ **ΕΒΑ** ἐστὶν ἴσα καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΕΖ**, **ΓΔΖ** τᾷ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστὶν ἴσα·

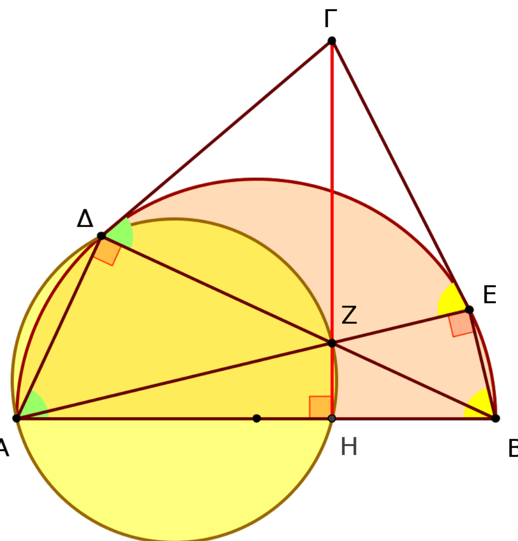
καὶ δέδεικται παρ᾽ ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων ὅτι εἴ κα μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, οἷον τῶν **ΓΔ**, **ΓΕ**, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ **ΔΖ**, **ΕΖ**, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομὲνα, ὡς ἁ ποτὶ τῷ **Ζ**, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν περιεχομένᾳ, ὡς αἱ ποτὶ τοῖς **Ε**, **Δ** σαμείοις, ἴσα ἐστίν, ἁ ἐπιζευχνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου καθ᾽ ὃ αἱ δύο εὐθεῖαι συμβαλέοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ αὗται τεμνέοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ **ΓΖ** εὐθεῖα, ἑκατέρᾳ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς αἱ **ΓΔ**, **ΓΕ**, ἐστὶν ἴσα·

ἁ **ΓΖ** εὐθεῖα ἄρα τᾷ **ΓΔ** ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΖΔ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΓΔΖ**, τουτέστι τᾷ ὑπὸ **ΔΑΗ**· γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ **ΓΖΔ**, **ΔΖΗ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΔΑΗ**, **ΔΖΗ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστίν· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ **ΑΔΖΗ** αἱ ὑπὸ **ΑΔΖ**, **ΑΗΖ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΔΒ** μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΑΗΓ** μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστίν· ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἁ **ΓΗ** διαμέτρῳ τᾷ **ΑΒ** ποτ᾽ ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

12.

Ἐὰν ἀπὸ σημείου ἐκτὸς ἡμικυκλίου ἀχθοῦν δύο εὐθεῖες ἐφαπτόμενες αὐτοῦ, ἀχθοῦν δὲ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο εὐθεῖες πρὸς τὰ ἀπεναντίον πέρατα τῆς διαμέτρου, τεμνόμενες μεταξὺ τους, ἡ ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς σημείου πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα, καὶ ἐκβληθεῖσα μέχρι τὴν διάμετρον θὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὴν.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ **ΑΒ**, σημεῖον δὲ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ **Γ**, καὶ ἐκ τοῦ **Γ** ἄς ἀχθοῦν δύο εὐθεῖες οἱ **ΓΔ**, **ΓΕ** ἐφαπτόμενες αὐτοῦ κατὰ τὰ **Δ**, **Ε** σημεῖα καὶ ἄς ἑνωθοῦν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τῆς διαμέτρου τὰ **Α**, **Β** μὲ τίς εὐθεῖες **ΕΑ**, **ΔΒ** ποὺ τέμνονται μεταξὺ τους κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ ἄς ἀχθεῖ ἡ **ΓΖ** καὶ ἄς προεκταθεῖ μέχρι τὸ **Η** σημεῖον· ἰσχυρίζομαι ὅτι, ἡ **ΓΗ** εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρο **ΑΒ**.



Ἄς ἑνωθοῦν οἱ **ΑΔ**, **ΕΒ**. Θὰ εἶναι τότε

$\angle\mathbf{\Delta AB} + \angle\mathbf{\Delta BA} = \angle\mathbf{AEB} \rightarrow$

$\angle\mathbf{\Delta AB} + \angle\mathbf{\Delta BA} + \angle\mathbf{ZBE} = \angle\mathbf{AEB} + \angle\mathbf{ZBE} \rightarrow$

$\angle\mathbf{\Delta AB} + \angle\mathbf{EBA} = \angle\mathbf{\Delta ZE}$

ἀλλὰ

$\angle\mathbf{\Gamma\Delta B} = \angle\mathbf{\Delta AB}$ καὶ $\angle\mathbf{\Gamma EZ} = \angle\mathbf{EBA}$

ἄρα

$\angle\mathbf{\Gamma\Delta Z} + \angle\mathbf{\Gamma EZ} = \angle\mathbf{\Delta AB} + \angle\mathbf{EBA} = \angle\mathbf{\Delta ZE}$

καὶ ἀποδεικνύεται στὴν πραγματεία Περὶ τετραπλεύρων ὅτι ἐὰν μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, ὅπως τῶν **ΓΔ**, **ΓΕ** ἀχθοῦν δύο εὐθεῖες ὅπως οἱ **ΔΖ**, **ΕΖ** τεμνόμενες εἰς τὸ **Ζ**, θὰ ἰσχύει

$\angle\mathbf{\Gamma\Delta Z} + \angle\mathbf{\Gamma EZ} = \angle\mathbf{\Delta ZE} \rightarrow \mathbf{\Gamma\Delta} = \mathbf{\Gamma E} = \mathbf{\Gamma Z}$

Τότε ὅμως θὰ εἶναι

$\angle\mathbf{\Gamma\Delta Z} = \angle\mathbf{\Gamma Z\Delta} = \angle\mathbf{\Delta AH} \rightarrow$

$\angle\mathbf{\Delta AH} + \angle\mathbf{\Delta ZH} = \angle\mathbf{\Gamma Z\Delta} + \angle\mathbf{\Delta ZH} = 2^{\mathbf{L}} \rightarrow$

ΔΑΗΖ ἐγγράψιμο $\rightarrow$

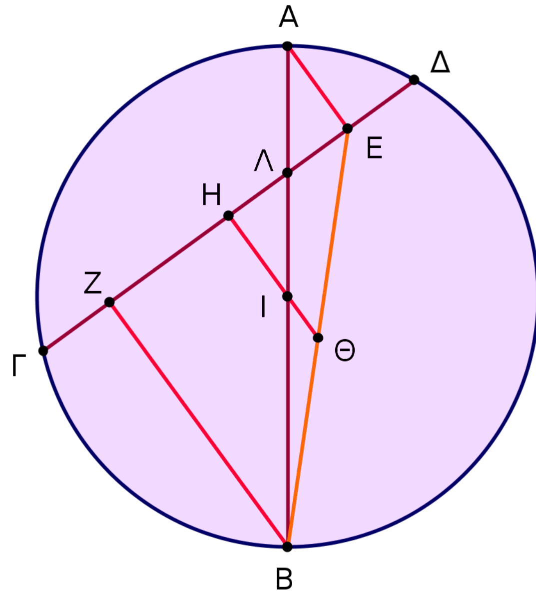
$\angle\mathbf{A\Delta Z} + \angle\mathbf{AHZ} = 2^{\mathbf{L}} \rightarrow$

$\angle\mathbf{AHZ} = 1^{\mathbf{L}}$

Εἶναι δηλαδὴ ἡ **ΓΗ** κάθετη στὴν διάμετρο **ΑΒ**· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ιγʹ.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς ὦσιν, ἁ μὲν διάμετρος ἁ δὲ οὔ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ἄλλᾳ εὐθεία, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.



Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ** καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, ἆν ἁ **ΑΒ** διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν **Α**, **Β** ἄχθωσαν τᾷ **ΓΔ** ποτ᾽ ὀρθὰς εὐθεῖαι αἱ **ΑΕ**, **ΒΖ**. φαμὶ δή, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ **ΓΖ**, **ΔΕ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ **ΕΒ** καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ **Ι** τᾷ **ΓΔ** ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ **ΙΗ** καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τᾷ **ΕΒ** κατὰ τὸ **Θ** σαμεῖον.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ **ΙΗ** παρὰ τὰν **ΑΕ** ἐστίν, ἁ δὲ **ΒΙ** τᾷ **ΙΑ** ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἁ **ΒΘ** τᾷ **ΘΕ** ἐστὶν ἴσα.

Πάλιν, ἐπεὶ ἁ **ΒΖ** παρὰ τὰν **ΘΗ** ᾖ, ἐστίν εὐθεῖα ἄρα ἁ **ΖΗ** εὐθείᾳ τᾷ **ΗΕ** ἐστὶν ἴσα. ἔστι δὲ καὶ ἁ **ΗΓ** τᾷ **ΗΔ** ἴσα. κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ **ΖΗ**, τουτέστιν ἁ **ΗΕ**· λοιπὰ ἄρα ἁ **ΖΓ** λοιπᾷ τᾷ **ΕΔ** ἐστὶν ἴσα· φανερὸν οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν σὲ ἕνα κύκλο δύο εὐθεῖες τέμνονται ὄχι καθέτως, ἡ μία μὲν διάμετρος ἡ δὲ ἄλλη ὄχι, ἀχθοῦν δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου εὐθεῖες κάθετες πρὸς τὴν ἄλλη, τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τμήματα εἶναι μεταξὺ τους ἴσα.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ** καὶ εἰς αὐτὸν δύο εὐθεῖες, τεμνόμενες ὄχι κάθετα οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ **ΑΒ** διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τῶν **Α**, **Β** ἄς ἀχθοῦν πρὸς τὴν **ΓΔ** κάθετα τμήματα τὰ **ΑΕ**, **ΒΖ**. ἰσχυρίζομαι ὅτι, τὰ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου λαμβανόμενα τμήματα τὰ **ΓΖ**, **ΔΕ** εἶναι μεταξὺ τους ἴσα.

Διότι ἄς ἑνωθεῖ ἡ **ΕΒ** καὶ ἀπὸ τὸ κέντρο **Ι** τοῦ κύκλου ἄς ἀχθεῖ κάθετος πρὸς τὴν **ΓΔ** ἡ **ΙΗ** καὶ ἄς προεκταθεῖ ἕως ὅτου τμήσει τὴν **ΕΒ** στὸ **Θ** σημεῖον. Τότε λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{IH} \parallel \mathbf{AE} \\ \mathbf{BI} = \mathbf{IA}\end{array}\right\} \to \mathbf{B\Theta} = \mathbf{\Theta E}$$

Πάλι ἐπειδὴ

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{BZ} \parallel \mathbf{\Theta H} \\ \mathbf{B\Theta} = \mathbf{\Theta E}\end{array}\right\} \to \mathbf{ZH} = \mathbf{HE}$$

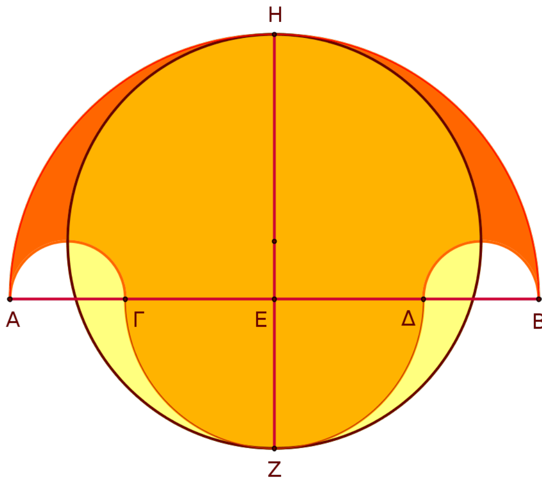
ὥστε τελικὰ

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{H\Gamma} = \mathbf{H\Delta} \\ \mathbf{ZH} = \mathbf{HE}\end{array}\right\} \to \mathbf{\Gamma Z} = \mathbf{EZ}$$

Φανερὸν λοιπὸν ὅτι ἐδείχθη τὸ προτεθὲν.

ιδ′.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἴσα τμάματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἁμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τᾶς διαμέτρου ἁμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος συναμφότερος ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἁμικυκλίου καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.



Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ **ΑΒ**, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν **Α**, **Β** δύο τμάματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθω τὰ **ΑΓ**, **ΒΔ**, γεγράφθω δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἁμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τοῦ **ΓΔ** γεγράφθω ἁμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἁμικυκλίου τοῦ **Ε** διαμέτρῳ τᾷ **ΑΒ** ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ **ΕΖ** καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ **Η** σαμεῖον· φαμὶ δή, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ **ΖΗ**, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

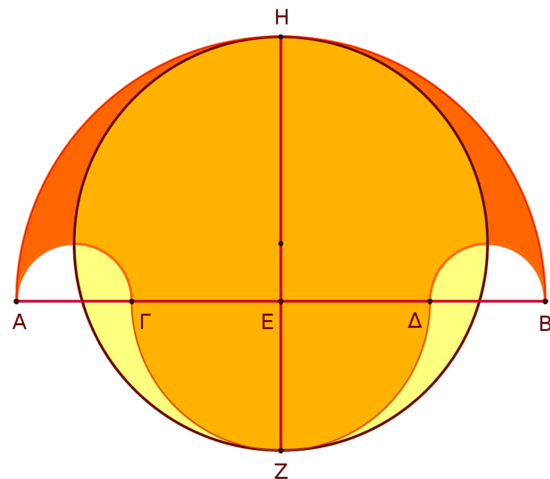
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἁ **ΔΓ** δίχα τέτμαται κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον, ποτίκειται δὲ αὐτᾷ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἁ **ΓΑ**, τὸ ἀπὸ τᾶς **ΔΑ** καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ποτικειμένας τᾶς **ΓΑ** τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλασιόνά ἐντι τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς **ΔΕ** καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΕΑ** τετραγώνου.

Ἔστι δὲ ἁ **ΖΗ** τᾷ **ΔΑ** ἴσα ἔστιν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΖΗ**, **ΓΑ** διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τᾶς **ΔΕ** καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΕΑ**.

Καὶ ἐπεὶ ἁ **ΑΒ** τᾶς **ΑΕ** διπλασίων ἐστὶ καὶ ἁ **ΓΔ** τᾶς **ΔΕ**, ἐσσοῦνται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τοῖς ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΑ** τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΗ**, **ΓΑ** διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ **ΑΒ**, **ΔΓ** εὐθεῖαι, κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ **ΖΗ**, **ΓΑ**, διπλασιόνές ἐντι· ἁμικύκλια ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ **ΑΒ**, **ΔΓ** εὐθεῖαι, κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ **ΖΗ**, **ΓΑ**, ἴσα ἐστίν· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ **ΑΓ**, τουτέστι δύο ἁμικύκλια, ὧν διάμετροι αἱ **ΑΓ**, **ΔΒ**· λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ **ΖΗ**, ἴσον ἐστίν· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

14.

Ἐὰν σὲ ἕνα ἡμικύκλιο ἀπὸ τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ληφθοῦν δύο ἴσα τμήματα καὶ ἀπὸ τούτων γραφοῦν ἡμικύκλια ἐντὸς, γραφῆ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς διαμέτρου ἡμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡμικυκλίων εἶναι ἴσος μὲ τὸ χωρίο τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἅς καλεῖται σελήνιον.



Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποῖου διάμετρος ἡ **ΑΒ**, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τῶν **Α**, **Β** ἅς ληφθοῦν δύο τμήματα ἴσα μεταξὺ τους τὰ **ΑΓ**, **ΒΔ**, καὶ ἅς γραφοῦν δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων δύο ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τοῦ **ΓΔ** ἅς γραφεῖ ἡμικύκλιον ἐκτός, ἀπὸ τὸ κέντρο δὲ **Ε** τοῦ ἡμικυκλίου, ἅς ἀχθεῖ κάθετος πρὸς τὴν **ΑΒ** ἡ **ΕΖ** καὶ ἅς προεκταθεῖ ἕως τὸ σημεῖον **Η**· ἰσχυρίζομαι ὅτι, ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ **ΖΗ**, εἶναι ἴσος μὲ τὸ χωρίο τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἅς καλεῖται σελήνιον.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ **ΔΓ** τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ **Ε** σαμεῖον, καὶ πρόσκειται ἐπ᾽αὐτῆς ἡ εὐθεία **ΓΑ**, θὰ ἰσχύει (Στοιχεῖα Βιβ.2,10)

$$\mathsf{\Delta A}^2 + \mathsf{A\Gamma}^2 = 2 \cdot (\mathsf{E\Delta}^2 + \mathsf{EA}^2)$$

ἰσχύει ὅμως ὅτι

$$\mathsf{HZ} = \mathsf{EA} + \mathsf{E\Delta} = \mathsf{\Delta A}$$

ὁπότε θά εἶναι

$$\mathsf{AB}^2 + \mathsf{\Gamma\Delta}^2 = 4 \cdot (\mathsf{E\Delta}^2 + \mathsf{EA}^2) = 2 \cdot (\mathsf{\Delta A}^2 + \mathsf{A\Gamma}^2) = 2 \cdot (\mathsf{HZ}^2 + \mathsf{A\Gamma}^2)$$

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι μεταξὺ τους ὅπως τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τους [καὶ συμβολίζοντας μὲ $(\mathsf{K_{XY}})$ ἐμβαδὸν κύκλου διαμέτρου **ΧΥ** καὶ μὲ $(\mathsf{H_{XY}})$ τὸ ἐμβαδὸν ἡμικυκλίου διαμέτρου **ΧΥ**] λαμβάνουμε ἐκ τῶν ἀνωτέρω

$$(\mathsf{K_{AB}}) + (\mathsf{K_{\Gamma\Delta}}) = 2 \cdot ((\mathsf{K_{HZ}}) + (\mathsf{K_{A\Gamma}})) \rightarrow$$
$$(\mathsf{H_{AB}}) + (\mathsf{H_{\Gamma\Delta}}) = (\mathsf{K_{HZ}}) + (\mathsf{K_{A\Gamma}}) \rightarrow$$
$$(\mathsf{H_{AB}}) + (\mathsf{H_{\Gamma\Delta}}) - (\mathsf{K_{A\Gamma}}) = (\mathsf{K_{HZ}}) \rightarrow$$
$$(\mathsf{H_{AB}}) + (\mathsf{H_{\Gamma\Delta}}) - (\mathsf{H_{A\Gamma}}) - (\mathsf{H_{\Delta B}}) = (\mathsf{K_{HZ}}) \rightarrow$$
$$(\mathsf{E}_{\text{σελήνιου}}) = (\mathsf{K_{HZ}})$$

ἀπεδείχθει λοιπὸν τὸ προτεθὲν.

ιε′.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἁ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἁ ΔΒ τεμνέουσα πλευρὰν τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΖΗ· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΕΗ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ **ΓΒ**, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Θ** σαμεῖον, καὶ ἄχθωσαν αἱ **ΘΔ**, **ΔΗ**, **ΑΔ** εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΒΓ** δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν, γωνία ἁ ὑπὸ **ΓΒΔ**, τουτέστι ἁ ὑπὸ **ΔΒΑ**, ἓν πεμπταμόριον ὀρθᾶς ἐστιν· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΔΘΑ** δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς **ΓΒΖ**, **ΗΒΖ** δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ **Β** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ **Η**, **Γ** σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ **ΒΖ**, ἐσσεῖται ἄρα καὶ βάσις ἁ **ΒΓ** βάσει τᾷ **ΒΗ** ἴσα.

Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς **ΓΒΔ**, **ΗΒΔ** δύο πλευραὶ αἱ **ΓΒ**, **ΒΗ** ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τῷ **Β** ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ **ΒΔ**, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΒΓΔ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΒΗΔ**, τουτέστιν ἐπιπέμπτῳ ὀρθᾶς, ἴσα· ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΒΗΔ** γωνιῶν γωνίᾳ τᾷ ἐκτὸς τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ **ΒΑΔΓ**, τουτέστι τᾷ **ΔΑΕ**, ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΔΗΑ** ἔστιν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἁ **ΔΑ** τᾷ **ΔΗ**.

Καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΔΘΗ βε′** ὀρθᾶς ἐστι καὶ ἁ ὑπὸ **ΔΗΘ** ἐπίπεμπτος ὀρθᾶς, γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΘΔΗ βε′** ὀρθᾶς ἐστιν πλευρὰ ἄρα ἁ **ΔΗ** πλευρᾷ τᾷ **ΗΘ** ἐστὶν ἴσα.

Πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΔΕ** τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ **ΑΔΓΒ** ἐκτός ἐστιν, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΔΕ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἴσα· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ **ΑΒΓ βγ′** ὀρθᾶς· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ **ΑΔΕ** γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ **ΗΔΘ** ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς **ΕΔΑ**, **ΘΔΗ** δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΕΔΑ**, **ΔΑΕ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΘΔΗ**, **ΔΗΘ** ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἁ **ΔΑ** βάσει τᾷ **ΔΗ** ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἁ **ΕΑ** πλευρᾷ τᾷ **ΘΗ** ἴσα ἐστίν.

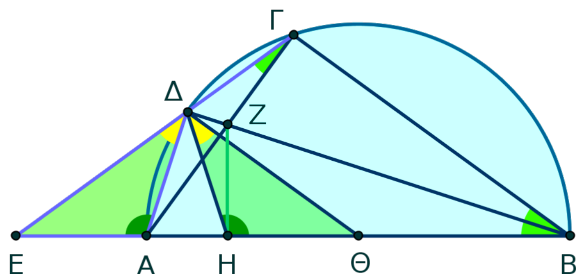
Κοινὰ ποτικείσθω ἁ **ΑΗ**· εὐθεῖα ἄρα ἁ **ΕΗ** εὐθείᾳ τᾷ **ΑΘ**, τουτέστι τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἴσα ἐστίν· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α : **Ἐκ τούτου δὴ φανερὸν ὅτι εὐθεῖα ἁ ΔΕ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστίν, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἁ ΔΘ πλευρᾷ τᾷ ΔΕ, τουτέστι τᾷ ΑΘ, ἴσα.**

Π ό ρ ι σ μ α : **Καὶ ἔτι δῆλον ὅτι εὐθεῖα ἁ ΕΓ ἄκρον καὶ μέσον τέτμαται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μεῖζόν ἐστιν, ἐπεὶ ἁ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἁ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.**

15.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, ἄς τμηθεῖ δὲ ἡ περιφέρεια ΑΓ εἰς τὸ μέσο κατὰ τὸ Δ, ἄς ἐπιζευχθεῖ δὲ ἡ ΓΔ καὶ ἄς προεκταθεῖ ἕως τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄς ἀχθεῖ ἡ ΔΒ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄς ἀχθεῖ κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΖΗ· ἰσχυρίζομαι ὅτι, ἡ εὐθεῖα ΕΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



Διότι ἄς ἑνωθεῖ ἡ **ΓΒ**, καὶ ἔστω τὸ σημεῖον **Θ** τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἄς ἀχθοῦν οἱ εὐθεῖες **ΘΔ**, **ΔΗ**, **ΑΔ**. Τότε

$$\angle \mathbf{AB\Gamma} = \frac{2^{\mathsf{L}}}{5} \rightarrow$$
$$\angle \mathbf{\Gamma B\Delta} = \angle \mathbf{\Delta BA} = \frac{1^{\mathsf{L}}}{5} \rightarrow$$
$$\angle \mathbf{\Delta\Theta A} = \frac{2^{\mathsf{L}}}{5}$$

Γιὰ τὰ τρίγωνα **ΓΒΖ**, **ΗΒΖ** ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \angle \mathbf{H} = \angle \mathbf{\Gamma} = 1^{\mathsf{L}} \\ \angle \mathbf{\Gamma BZ} = \angle \mathbf{ZBH} = \dfrac{1^{\mathsf{L}}}{5} \\ \mathbf{BZ} \text{ κοινὴ} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{B\Gamma} = \mathbf{BH}$$

Τότε καὶ τὰ τρίγωνα **ΓΒΔ**, **ΗΒΔ** θὰ εἶναι ἴσα διότι

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{\Gamma B} = \mathbf{BH} \\ \angle \mathbf{\Gamma B\Delta} = \angle \mathbf{\Delta BH} \\ \mathbf{B\Delta} \text{ κοινὴ} \end{array}\right\} \rightarrow \angle \mathbf{BH\Delta} = \angle \mathbf{B\Gamma\Delta} = \frac{6^{\mathsf{L}}}{5} = \angle \mathbf{\Delta AE} \rightarrow \angle \mathbf{\Delta AB} = \angle \mathbf{\Delta HA} \rightarrow \mathbf{\Delta A} = \mathbf{AH}$$

Πάλι ἐπειδὴ ἡ γωνία **ΑΔΕ** εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου **ΑΔΓΒ** θὰ εἶναι $\angle \mathbf{A\Delta E} = \angle \mathbf{AB\Gamma} = 2^{\mathsf{L}}/5$. Ἄρα γιὰ τὰ τρίγωνα **ΕΔΑ**, **ΘΔΗ** θὰ εἶναι

$$\left.\begin{array}{l} \angle \mathbf{A\Delta E} = \angle \mathbf{H\Delta\Theta} = \dfrac{2^{\mathsf{L}}}{5} \\ \mathbf{\Delta A} = \mathbf{\Delta H} \\ \angle \mathbf{\Delta AE} = \angle \mathbf{\Delta H\Theta} = \dfrac{6^{\mathsf{L}}}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle \mathbf{E\Delta A} = \mathbf{\Theta\Delta H}\triangle \rightarrow \mathbf{EA} = \mathbf{H\Theta} \rightarrow \mathbf{EH} = \mathbf{A\Theta}$$

ἀπεδείχθει λοιπὸν τὸ προτεθὲν.

Πόρισμα: Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τοῦ κύκλου. Διότι ἐπειδὴ ∠ΔΑΕ= ∠ΔΗΘ θὰ εἶναι καὶ ΔΘ = ΔΕ = ΑΘ.

Πόρισμα: Καὶ ἀκόμα εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΓ ἔχει τμηθεῖ σὲ ἄκρο καὶ μέσο λόγο κατὰ τὸ Δ σημεῖον· τμῆμα δὲ τὸ ΔΕ εἶναι τὸ μεγαλύτερο, ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων. (Στοιχεῖα 13,9)

Βιβλιογραφία

- J.L. Heiberg, Archimedis, Opera Omnia, Vol. II, B.G. Teubner, Lipsiae
- T.L. Heath, The Works Of Archimedes, Cambridge University Press, 1897
- Charles Mugler, ARCHIMEDE TOME III, PARIS 1971
- Ε.Σ. Σταμάτη, Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν Σικελικὴν Δωρικὴν διάλεκτον δεκαπέντε θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ὁποῖα σώζονται εἰς τὴν Ἀραβικὴν, Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ δελτίου τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, Νέα Σειρὰ, Τόμος 6ΙΙ, Τεῦχος 2 1965, σελ. 265-297



ISBN 978-1-387-90423-5
90000
9 781387 904235